Διάλεξη 15η

29/11/2018

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Θεώρημα: Αν $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ διακεκριμένες ρίζες του χ.π. $P(\lambda) = a_n\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0$ (χαρακτ. πολυώνυμο) της ομογενούς γραμμ. διαφ. εξίσ. (E_0): $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ με α.π. πολλαπλότητας $m_1, \dots, m_s$ αντίστοιχα με $m_1 + m_2 + \dots + m_s = n$, τότε οι συναρτήσεις:

$$x^j e^{\lambda_i x}, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 0, \dots, m_i - 1$$

αποτελούν ένα βασ. σύνολο λύσεων της (E_0)

Απόδ.

(Δεν την έκανε)

Π.χ.

$$y''' - y'' - y' + y = 0$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1)$$

$$= (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \begin{cases} \to \lambda_1 = 1 \\ \to \lambda_1 = -1 \end{cases}$$

για $m_1 = 2 \to \{e^x, xe^x\}$

$m_1 = 1 \to e^{-x}$

Έστω ότι έκανε βρει το χαρακτ. πολυώνυμο και είναι το

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)^3 (2\lambda + 1)^4 (\lambda - 7)$$

$\lambda_1 = -1, \ m_1 = 3 \rightsquigarrow e^{-x}, \ xe^{-x}, \ x^2 e^{-x}$

$\lambda_2 = -1/2, \ m_2 = 4 \rightsquigarrow e^{-1/2 x}, \ xe^{-1/2 x}, \ x^2 e^{-1/2 x}, \ x^3 e^{-1/2 x}$

$\lambda_3 = 7, \ m_3 = 1 \rightsquigarrow e^{7x}$

Θεώρημα (90): Υποθέτουμε ότι $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Τότε

(i) Αν y είναι μια λύση της (E_0) τότε και οι $Re(y)$, $Im(y)$, είναι λύσεις. (δηλαδή το πραγματικό μέρος και το φανταστικό, είναι λύσεις)

(ii) Κάθε λύση με πραγματικές αρχικές συνθήκες είναι πραγματική.

(iii) Αν $\{y_1, \dots, y_n\}$ είναι βασ. σύνολο πραγματικών λύσεων τότε μια συνάρτηση y είναι πραγματική λύση της (E_0) αν και μόνο αν $\exists\, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ με $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$.

(iv) Αν $\lambda_1 = \sigma_1 + i\tau_1, \dots, \lambda_r = \sigma_r + i\tau_r$ $\left(\begin{array}{l} \sigma_i, \tau_i \in \mathbb{R} \\ i = 1, \dots, r \\ \tau_i \neq 0 \end{array}\right)$ είναι διακεκριμένες μιγαδικές ρίζες πολλαπλότητας αντίστοιχα $m_1, \dots, m_r$ και $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_s$ διακεκ. πραγμ. ρίζες πολ. $m_{r+1}, \dots, m_s$ του χαρακ. πολυωνύμου της (E_0), τότε οι συναρτήσεις:

$$x^j e^{\sigma_i x} \cos \tau_i x, \quad x^j e^{\sigma_i x} \sin \tau_i x, \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1$$

$$x^j e^{\lambda_i x}, \quad i = r+1, \dots, s, \quad j = 0, \dots, m_i - 1$$

αποτελούν ένα πραγματικό Β.Σ.Λ.

Απόδ.

(i) Ας είναι y λύση της (E_0). Τότε $y(x) = (Re\, y)(x) + i(Im\, y)(x)$ και $L(y)(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

$$L(Re\, y)(x) + L(Im\, y)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad L(Re\, y)(x) = 0, \quad L(Im\, y)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

(ii) Ας είναι y, λύση της (E_0) με $y(x_0)=c_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0)=c_{n-1} \in \mathbb{R}$
τότε η συνάρτηση $(\operatorname{Im} y)(x)$ είναι μια λύση της (E_0) για την οποία $(\operatorname{Im} y)(x_0)=0$, $(\operatorname{Im} y)'(x_0)=0, \dots, (\operatorname{Im} y)^{(n-1)}(x_0)=0$
δηλαδή η $(\operatorname{Im} y)(x)$ είναι μια λύση της (E_0) με μηδενικές αρχικές συνθήκες στην x_0. Επομένως η $\operatorname{Im} y \equiv 0$, άρα $y(x) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Ας είναι $\{y_1, \dots, y_n\} \in \mathbb{R}$ ένα Θ.Σ.Λ. πραγματικών.
$y(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$ είναι πραγματική, αντίστροφα, υποθέτω ότι για μια πραγματική λύση y έχουμε $y(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$:

τότε $(\operatorname{Im} y)(x) \equiv 0$, άρα $\operatorname{Im}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)\right)=0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i(x)(\operatorname{Im} c_i)=0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} c_i = 0 \quad (y_1, \dots, y_n \text{ γρ. ανεξ.})$$

π.χ

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = (\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i.$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+i$, $\lambda_3 = 1-i$. ...... κ.τ.λ.

π.χ

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1$$

$$= (\lambda^2+1)^2$$

$$\underbrace{i, -i}_{\text{διπλή}}$$

$0+i$
$0-i$

$\sigma = 0$
$\tau = 1$

άρα: $e^{0x}\cos x$, $xe^{0x}\cos x$

$e^{0x}\sin x$, $xe^{0x}\sin x$

λύσεις

Π.χ

Αν έχω το χ.π.: $P(\lambda) = \underbrace{(\lambda^2+4)^3}_{\pm 2i}\underbrace{(\lambda-2)^2}_{e^{2x},\, xe^{2x}}(3\lambda+7)$, $e^{-7/3x}$

Οπότε: $\cos 2x$, $\sin 2x$

$x\cos 2x$, $x\sin 2x$

$x^2\cos 2x$, $x^2\sin 2x$.

Άσκηση B-43 (άλυτες): Έστω $y''-2by'+cy=0$, $b,c\in\mathbb{R}$

αν y λύση με $y(0)=0=y(1) \rightsquigarrow y(n)=0$, $\forall n\in\mathbb{Z}$!

Λύση

$\lambda^2-2b\lambda+c$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2b\pm\sqrt{4b^2-4c}}{2} = b\pm\sqrt{b^2-c}$$

• Αν $b^2=c$ τότε $\Delta=0$ και $\lambda=b$ διπλή

οπότε $\{e^{bx}, xe^{bx}\}$

άρα όποια λύση και να πάρω θα είναι της μορφής

$y(x)=c_1e^{bx}+c_2xe^{bx}$, $x\in\mathbb{R}$

$\left.\begin{aligned} &y(0)=0 \Rightarrow c_1=0 \\ &y(1)=0 \Rightarrow c_2e=0 \Rightarrow c_2=0 \end{aligned}\right\}$ το επαληθεύσαμε

• Αν $b^2>c$ τότε $\Delta>0$ και το Β.Σ.Λ. είναι $\{e^{\lambda_1x}, e^{\lambda_2x}\}$

άρα όλες οι λύσεις δίνονται από:

$y(x)=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}$, $x\in\mathbb{R}$

$y(0)=0 \Rightarrow c_1+c_2=0$

$y(1)=0 \Rightarrow c_1e^{\lambda_1}+c_2e^{\lambda_2}=0$

$c_1e^{\lambda_1}-c_1e^{\lambda_2}=0 \Rightarrow c_1\underbrace{(e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2})}_{\neq 0}=0 \Rightarrow \underline{c_1=0}$.

$c_1=-c_2 \Rightarrow \underline{c_2=0}$.

• Αν $b^2 < c$ τότε $\Delta < 0$

$\lambda_{1,2} = b \pm i\tau \; (\tau = \sqrt{|b^2 - c|})$, ΣΘΛ Β.6.7 είναι το
$\{e^{bx}\cos\tau x, \; e^{bx}\sin\tau x\}$

οι λύσεις είναι: $y(x) = c_1 e^{bx}\cos\tau x + c_2 e^{bx}\sin\tau x, \; x \in \mathbb{R}$

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$y(1) = 0 \Rightarrow c_2 e^{b}\sin\tau = 0 \; \begin{cases} c_2 = 0 \\ \tau = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

$$\underline{y(x) = c_2 e^{bx}\sin(\pi \cdot x)}$$

Άσκηση Β-53: $y'' + 8y' + 25y = 2\cos x$

$\rightsquigarrow \exists\, a, \delta \in \mathbb{R} : \lim_{+\infty}\left(y(x) - a\cos(x - \delta)\right) = 0$

Λύση

$(E_0): \; y'' + 8y' + 25y = 0$

$\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 100}}{2} = \frac{-8 \pm i6}{2} = -4 \pm 3i.$$

ΣΘΛ Β.6.7 είναι: $\{\underbrace{e^{-4x}\cos 3x}_{y_1}, \underbrace{e^{-4x}\sin 3x}_{y_2}\}$ // $\lim y_i(x) = \dots = 0$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-4x}\cos 3x & e^{-4x}\sin 3x \\ -4e^{-4x}\cos 3x - 3\sin 3x\, e^{-4x} & -4e^{-4x}\sin 3x + 3\cos 3x\, e^{-4x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{-8x}\begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -4\cos 3x - 3\sin 3x & -4\sin 3x + 3\cos 3x \end{vmatrix} = 3\cos^2 3x - 4\sin 3x\cos 3x + 4\cos 3x\sin 3x + 3\sin^2 3x = 3$$

$W(x) = 3e^{-8x}$

$W_1(x) = -e^{-4x}\sin 3x$, οπότε $\quad W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-4}\sin 3x \\ 1 & \cdots \end{vmatrix}$

$W_2(x) = e^{-4x}\cos 3x$, οπότε: $\quad W_2(x) = \begin{vmatrix} \cdots & 0 \\ \cdots & 1 \end{vmatrix}$

$$y_p(x) = y_1(x) \cdot \int_0^x \frac{W_1(s)}{W(s)} \frac{b(s)}{a_2(s)}\, ds + y_2(x) \int_0^x \frac{W_2(s)}{W(s)} \frac{b(s)}{a_2(s)}\, ds$$

$$y_p(x) = e^{-4x}\cos 3x \int_0^x -\frac{e^{-4s}\cos 3s}{3} \cdot 2\cos s\, ds + e^{-4x}\sin 3x \int_0^x \frac{e^{-4s}\cos(3s)}{3} \cdot 2\cos s\, ds$$

⋮ (πράξεις)

$$y_p(x) = \frac{3}{40}\cos x + \frac{1}{40}\sin x \xrightarrow[\text{σε μια επιθυμητή μορφή;}]{\text{πως θα πάει}} \underline{a(\cos(x-\delta))}$$

$A\cos(kx) + B\sin(kx)$

<u>1ος τρόπος:</u>

$$\sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(kx) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(kx)\right] = \left\{ \begin{array}{l} \exists\, \theta \in [0, 2\pi) \\ \cos\theta = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{array} \right\}$$

$$= \underbrace{\sqrt{A^2+B^2}}_{a}\left(\underbrace{\cos\theta\cos(kx) + \sin\theta\sin(kx)}_{\cos(\theta - kx)}\right)$$

$\cos(x-\theta)$